MATHÉMATIQUES

POUR LES SCIENCES DE LA VIE, DE LA NATURE ET DE LA SANTÉ

Jean Paul et Françoise BERTRANDIAS

Presses Universitaires de Grenoble
1997

La Collection Grenoble Sciences

La Collection Grenoble Sciences fut créée à l'Université Joseph Fourier avec un triple objectif :

- permettre d'offrir aux étudiants et usagers des ouvrages à des prix convenables,
- constituer une mémoire pour d'excellents documents qui restent souvent chez leurs auteurs,
- réaliser des ouvrages correspondant vraiment à un objectif clair, en contrepoint des ouvrages réalisés par rapport à tel ou tel programme plus ou moins officiel.

Certains documents sont publiés dans le seul cadre de l'Université Joseph Fourier. D'autres, destinés à un plus vaste public, sont sélectionnés par des referees, critiqués par un comité de lecture et édités dans cette collection spécifique des Presses Universitaires de Grenoble.

Déjà parus :

Chimie. Le minimum vital - J. Le Coarer
Endocrinologie. Fondements physiologiques - S. Idelman
Minimum Competence in Scientific English - J. Upjohn, S. Blattes et V. Jans
Introduction à la Mécanique statistique - E. Belorizky et W. Gorecki
Exercices corrigés d'Analyse (tomes 1 et 2) - D. Alibert
Bactéries et environnement. Adaptations physiologiques - J. Pelmont
La plongée sous-marine à l'air. L'adaptation de l'organisme et ses limites - P. Foster
Listening Comprehension for Scientific English - J. Upjohn
Electrochimie des solides - C. Déportes *et al.*
La Turbulence - M. Lesieur
Exercices et problèmes corrigés de Mécanique statistique - E. Belorizky et W. Gorecki
La symétrie en mathématiques, physique et chimie - J. Sivardière
La cavitation. Mécanismes physiques et aspects industriels - J.P. Franc *et al.*
L'Asie, source de sciences et de techniques - M. Soutif
Enzymes, catalyseurs du monde vivant - J. Pelmont
L'ergomotricité. Le corps, le travail et la santé - M. Gendrier
Introduction aux variétés différentielles - J. Lafontaine
Analyse numérique et équations différentielles - J.P. Demailly
Speaking Skills in Scientific English - J. Upjohn, M.H. Fries et D. Amadis
Thermodynamique chimique - M.A. Oturan et M. Robert

EXTRAITS

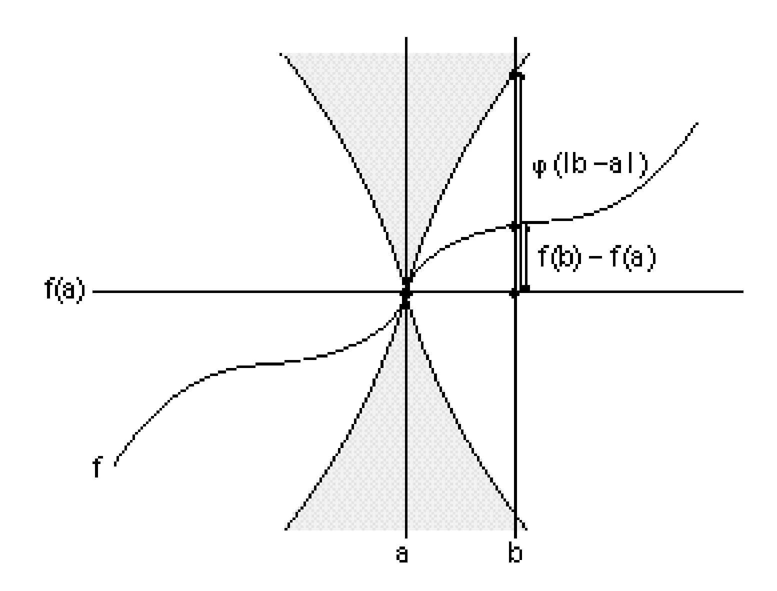
Si la fonction f est *croissante* (resp. *décroissante*) en *chaque* élément a de E, on dit qu'elle est *croissante* (resp. *décroissante*) *sur* l'ensemble E et dans les deux cas, on dit qu'elle est *monotone* sur l'ensemble E.

5.2. CONTINUITÉ

On dit qu'une fonction φ positive de la variable x positive ou nulle ($x \geq 0$) est un **module de continuité** si φ est *croissante* à partir de $\varphi(0) = 0$ et prend des valeurs arbitrairement petites sur l'ensemble des réels *strictement* positifs ($x > 0$).
(Pour éviter des complications inutiles dans la suite, on admet pour φ une valeur, notée ∞ , supérieure à tout nombre positif).

Exemples : les fonctions suivantes sont des modules de continuité
- la fonction linéaire $x \mapsto kx$ avec $k > 0$,
- la fonction $x \mapsto x^2$,
- la fonction $x \mapsto kx + x^2$ avec $k > 0$,
- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$,
- la fonction φ définie par $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ si $x < \frac{\pi}{2}$ et $\varphi(x) = \infty$ si $x \geq \frac{\pi}{2}$

> On dit que la fonction f est *continue* en a s'il existe un module de continuité φ tel que, pour tout élément b de E, on ait
> $$|f(b) - f(a)| \leq \varphi(|b - a|).$$
> Si la fonction f est *continue* en *chaque* élément a de E, on dit que la fonction f est *continue sur l'ensemble* E.



Exemples

- La fonction définie par $x \mapsto 1 - x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ car, pour tout a réel,

$$|(1 - b^2) - (1 - a^2)| = |b - a|\ |b + a| \leq 2|a||b - a| + |b - a|^2 .$$

On étend la définition de l'intégrale au cas $b < a$.

On a la *formule de Chasles* pour les intégrales, valable quelle que soit la position relative des trois nombres réels a, b, c.

$$\int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx$$

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$$

2.2 RELATIONS ENTRE INTÉGRALE ET PRIMITIVE

Si F est une fonction dérivable telle que $F' = f$, on dit que F est une **primitive** de f.

Obtention d'une primitive de f

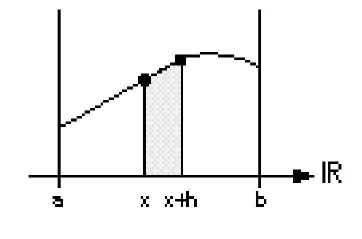
La fonction Ψ *définie par l'intégrale* $\Psi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *est une primitive de* f.

En effet $\dfrac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt$

D'après la continuité de f, ce rapport tend vers $f(x)$ quand h tend vers 0

car $f(x) - \varphi(h) \le f(t) \le f(x) + \varphi(h)$

donc $\left| \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x) \right| \le \varphi(h)$.



Expression de toutes les primitives de f

Si F *est une primitive quelconque de* f, *on a* $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$.

En effet la fonction définie par $F(x) - \int_a^x f(t)\,dt$ a une dérivée nulle sur $[a,b]$; elle est constante sur $[a,b]$ d'après les propriétés des dérivées (chapitre 3, § 5.3) et vaut $F(a)$.

Conséquences

- Si l'on connait une primitive F de f, l'intégrale de f sur $[a,b]$ s'en déduit.
- Si l'on ne connait pas de primitive de f, on peut en calculer une, Ψ, par calcul numérique.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\Psi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Formule fondamentale du calcul intégral

La différence $F(b) - F(a)$ s'appelle la *variation* de la fonction F entre a et b ; elle se note aussi $\left[F(x)\right]_a^b$. D'après la forme des primitives de f, on l'exprime comme l'intégrale entre a et b de l'expression $F'(x)\,dx$ qui est la *différentielle* dF de la fonction F (chapitre 3, § 5.4).

8. CAPACITÉ VITALE

La *capacité vitale* est le volume d'air maximum pouvant être mobilisé par une inspiration forcée suivie d'une expiration forcée.

Le tableau ci-contre donne la capacité vitale théorique c exprimée en cm^3 en fonction de l'âge g (en années) et de la taille t (en cm). Ces valeurs de c ont été obtenues aux Etats-Unis à partir de moyennes portant sur un grand nombre de mesures.

a) Ce tableau exprime c comme fonction des deux variables g et t. Donner une représentation graphique de cette fonction sous forme de courbes de niveaux.

b) On remarque que pour un âge fixé, la capacité vitale est approximativement *linéaire* relativement à la taille. Représenter graphiquement le rapport c/t en fonction de g et de t ; vérifier qu'il ne dépend pratiquement pas de t et est affine en g : $c/t = a + b\,g$.

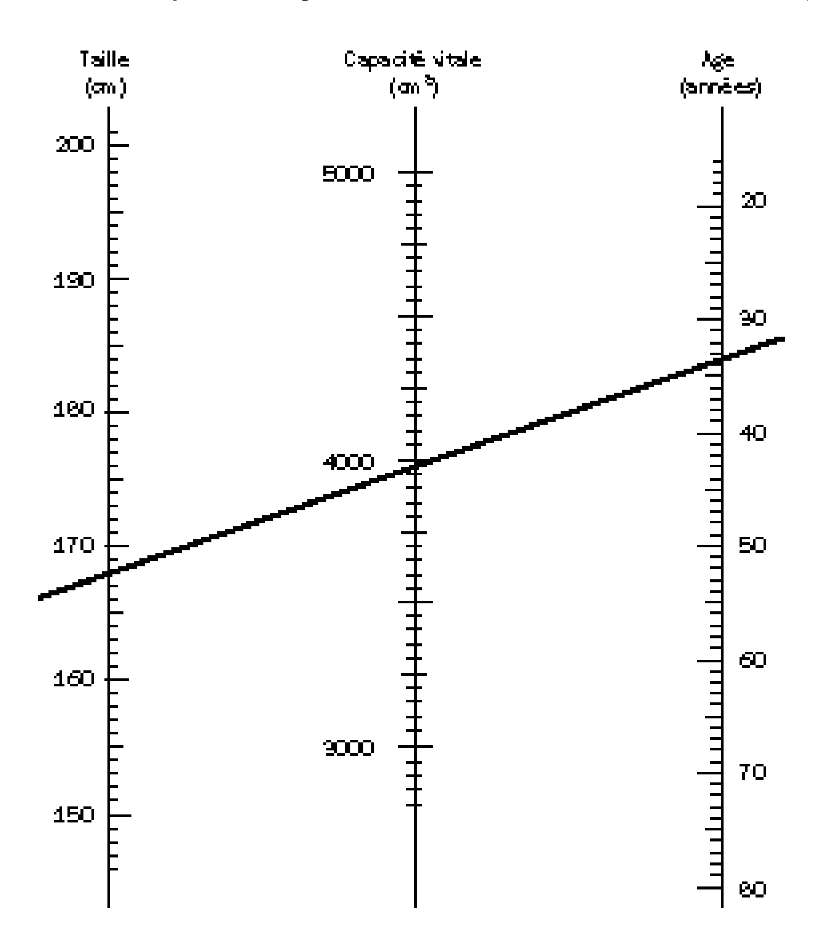
Renvoi : chapitre 4, exercice 5 pour une évaluation des coefficients a et b.

c) Pour calculer la capacité vitale, on utilise aussi des approximations affines. On étudiera la suivante :

$$c \approx -19{,}7\,g + 23{,}1\,t + 754.$$

Comparer cette fonction à celle qui est représentée par le tableau.
Construire un abaque donnant c en fonction de g et de t en utilisant cette approximation.

Référence : J.GERMOUTY - *La fonction respiratoire*, Éditions des Laboratoires Diamant, (1963).



6. DOSAGE D'UN MÉDICAMENT

On injecte un certain médicament par voie intraveineuse ; on désigne par $C(t)$ la concentration du médicament dans le sang à l'instant t. Après l'injection, la décroissance de la concentration C obéit à la règle suivante :

$$\Delta C = -\gamma C \, \Delta t \qquad \text{(où } \gamma \text{ est une constante positive).}$$

a) Montrer que la concentration $C(t)$ suit une loi exponentielle $C(t) = Q\,e^{-\gamma t}$ où Q est une constante dont on précisera la valeur.

b) On note T l'intervalle de temps nécessaire pour que la concentration baisse jusqu'au tiers de sa valeur à l'instant t, c'est- à-dire :

$$C(t+T) = C(t)/3.$$

Vérifier que T ne dépend pas de t et de $C(t)$; exprimer T en fonction de γ.

c) Une dose de 200 mg est administrée à un malade et un dosage de concentration est effectué à divers instants t (l'instant $t=0$ correspond à la fin de l'injection).
Les résultats sont donnés dans le tableau (t en heures, C en g/ml):

t	0	1	2	4	6	8	12	16	20	24
C	11,0	10,2	9,5	8,2	7,0	6,1	4,5	3,4	2,5	1,8

Représenter graphiquement C en fonction de t en coordonnées régulières et en coordonnées semi-logarithmiques.
Vérifier que C suit approximativement une loi exponentielle dont on évaluera les constantes.
Évaluer l'intervalle de temps T.

d) Pour que le médicament soit efficace sans être toxique, sa concentration doit toujours rester comprise entre un seuil minimum C_{min} et un seuil maximum C_{max}, c'est-à-dire :

$$C_{min} \leq C(t) \leq C_{max}.$$

Pour le médicament considéré, on a : $C_{min} = 5$ g/ml, $C_{max} = 15$ g/ml.

- Indiquer quelle quantité de médicament il faut injecter au malade considéré pour que la concentration à l'instant initial $t=0$ soit la concentration maximum C_{max}.
- Au bout de combien de temps la concentration descend-elle alors au-dessous de la concentration minimum C_{min} ?

e) On veut définir une posologie pour un traitement de longue durée avec ce médicament. Déterminer, pour le patient considéré, le nombre de piqûres à effectuer chaque jour et la dose à injecter ; on désire faire le moins de piqûres possibles, ces piqûres étant faites aux mêmes heures tous les jours. L'augmentation de la concentration au moment de chaque injection de médicament est proportionnelle à la quantité de médicament injectée.

f) On se propose de déterminer automatiquement la posologie pour traiter tout nouveau malade devant être soigné avec le médicament considéré.
Pour cela, on fait subir à chaque nouveau malade le test décrit dans la question c) et on note les concentrations correspondantes $C(0)$, $C(1)$,....

Écrire un programme permettant, en entrant les données obtenues au moyen du test, d'afficher les horaires des piqûres et leur dosage.

Rédiger un mode d'emploi de ce programme, en vue de son utilisation dans un service hospitalier.

7. ÉTUDE D'UN MÉDICAMENT ANTIÉPILEPTIQUE

Le médicament étudié dans l'exercice précédent était un antiépileptique, médicament dont les caractéristiques générales sont les suivantes :

- l'utilisation du médicament est prévue pour des traitements de très longue durée ; l'effet du médicament est corrélé à la concentration plasmatique du médicament ;
- la concentration plasmatique doit être supérieure à un certain seuil C_{min} (sous peine d'inefficacité du traitement) ;
- la concentration plasmatique ne doit pas dépasser un certain plafond C_{max} (assez proche de la concentration C_{tox} considérée comme toxique).

En période d'expérimentation, un nouveau médicament de ce type est essayé sur 12 patients.
Une dose de 200 mg est administrée par injection intraveineuse et un dosage de la concentration plasmatique (exprimée en g/ml) est effectué à divers instants t (en heures) à partir de l'instant 0 correspondant à la fin de l'injection. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant (données fictives).

t	0	1	2	4	6	8	12	16	20	24
n° 1	11.0	8.5	7.0	5.5	4.7	4.4	3.7	3.1	2.6	2.2
n° 2	10.4	8.1	6.7	5.4	4.7	4.3	3.5	2.9	2.4	2.0
n° 3	12.0	8.6	7.2	5.8	5.3	4.7	4.2	3.3	2.8	2.4
n° 4	10.1	7.9	6.5	5.2	4.5	4.0	3.3	2.7	2.3	1.9
n° 5	10.5	8.0	6.7	5.2	4.6	4.1	3.4	2.8	2.3	1.9
n° 6	9.0	7.0	5.9	4.8	4.2	3.7	2.9	2.4	2.0	1.5
n° 7	10.2	7.9	6.5	5.2	4.6	4.2	3.4	2.8	2.4	2.0
n° 8	11.2	8.4	7.0	5.7	5.0	4.5	3.9	3.6	2.8	2.4
n° 9	10.4	8.0	6.6	5.3	4.6	4.3	3.6	2.9	2.4	2.0
n° 10	9.9	7.5	6.2	4.9	4.4	3.9	3.0	2.5	2.0	1.8
n° 11	10.6	8.1	6.7	5.4	4.7	4.3	3.5	2.9	2.4	2.0
n° 12	10.5	8.2	6.9	5.7	5.0	4.4	3.6	3.0	2.6	2.0

a) Pour chaque instant t, calculer la moyenne $C(t)$ et l'écart-type de la concentration plasmatique.

b) Tracer en coordonnées semi-logarithmiques la courbe représentative de C en fonction de t et vérifier que C peut être considérée comme somme de deux exponentielles.
Évaluer les demi-vies correspondant à ces deux exponentielles : estimer la demi-vie la plus courte et soustraire l'exponentielle correspondante de $C(t)$ puis estimer l'autre demi-vie (méthode de l'*épluchage exponentiel*).

c) La valeur de l'élimination urinaire du médicament a été déterminée : on a trouvé (pour la période de 24 heures étudiée) une dose moyenne de 92 mg (écart-type = 10 mg).
En déduire une interprétation des deux demi-vies et proposer un modèle d'échange entre plusieurs compartiments (sang, reins, liquide interstitiel, ...).

d) Sachant que, pour ce médicament, les concentrations plasmatiques limites sont

$$C_{min} = 5 \text{ g/ml}, \qquad C_{max} = 15 \text{ g/ml}, \qquad C_{tox} = 20 \text{ g/ml}$$

proposer une posologie pour un traitement de longue durée en indiquant le nombre d'injections par jour et dosage de chaque injection (voir exercice précédent).

3. ÉQUILIBRE PROIES - PRÉDATEURS

La mise en équation de l'équilibre proies - prédateurs étudié au chapitre 7 (§ 4) est basée sur des relations entre accroissements des deux variables qui sont le nombre de proies L et le nombre de prédateurs R ; on peut utiliser directement ces relations pour évaluer de proche en proche les deux populations pour des intervalles de temps régulièrement espacés :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta L = a L \Delta t - b L R \Delta t, \\ \Delta R = - p R \Delta t + q L R \Delta t. \end{array} \right. \qquad (1)$$

c'est exactement la méthode d'Euler appliquée au système de Volterra :

$$\left| \begin{array}{l} L' = a L - b L R, \\ R' = - p R + q L R. \end{array} \right. \qquad (2)$$

On cherche des approximations de L et de R connaissant leurs valeurs initiales L_0 et R_0 pour $t = t_0$ (qu'on supposera égal à 0). Les valeurs successives (L_1,R_1), (L_2,R_2), … de (L,R) pour $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_1 + h$, … sont approchées par :

t	t_0	$t_1 = t_0 + h$	$t_2 = t_1 + h$	…
L	L_0	$L_1 = L_0 + h L_0 (a - b R_0)$	$L_2 = L_1 + h L_1 (a - b R_1)$	…
R	R_0	$R_1 = R_0 + h R_0 (q L_0 - p)$	$R_2 = R_1 + h R_1 (q L_1 - p)$	…

On obtient de meilleures approximations des solutions L, R du système de Volterra en adaptant au système différentiel du premier ordre la *méthode de Heun*.

Les valeurs approchées (L_1,R_1), (L_2,R_2), … de (L,R) pour $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_1 + h$, … sont obtenues par correction à partir des valeurs $(\overline{L_1}, \overline{R_1}), (\overline{L_2}, \overline{R_2})$, .. prévues par la *méthode d'Euler*.

t	t_0	$t_1 = t_0 + h$	$t_2 = t_1 + h$	…
		$\overline{L_1} = L_0 + h L_0 (a - b R_0)$	$\overline{L_2} = L_1 + h L_1 (a - b R_1)$	…
		$\overline{R_1} = R_0 + h R_0 (q L_0 - p)$	$\overline{R_2} = R_1 + h R_1 (q L_1 - p)$	…
L	L_0	$L_1 = \overline{L_1} - \frac{h}{2} L_0 (a - b R_0) + \frac{h}{2} \overline{L_1} (a - b \overline{R_1})$	$L_2 = \overline{L_2} - \frac{h}{2} L_1 (a - b R_1) + \frac{h}{2} \overline{L_2} (a - b \overline{R_2})$	…
R	R_0	$R_1 = \overline{R_1} - \frac{h}{2} R_0 (q L_0 - p) + \frac{h}{2} \overline{R_1} (q \overline{L_1} - p)$	$R_2 = \overline{R_2} - \frac{h}{2} R_1 (q L_1 - p) + \frac{h}{2} \overline{R_2} (q \overline{L_2} - p)$	…

a) *Programmation*

Pour chacune des deux méthodes, écrire un programme en Pascal permettant d'afficher les valeurs successives de L et R à partir de leurs valeurs initiales lues au clavier ainsi que les valeurs des constantes a, b, p et q. La valeur du pas sera aussi lue au clavier de manière à pouvoir expérimenter sur la précision des méthodes.

b) *Expérimentation*

Exécuter ce programme avec les données suivantes :

$$a = 0{,}6 \ ; \quad b = 0{,}01 \ ; \quad p = 2{,}5 \ ; \quad q = 0{,}01 \ ; \quad L(0) = 200 \ ; \quad R(0) = 50.$$

Relever dans un tableau les valeurs prises par L et R pour t par pas de 0,2 entre 0 et 6.
Représenter les fonctions L et R de la variable t dans les mêmes axes.
Représenter graphiquement les couples (L,R) ainsi obtenus, ainsi que le point E de coordonnées $\left(\frac{p}{q}, \frac{a}{b}\right)$. Calculer le maximum et le minimum de L et de R.

Calculer la durée d'un cycle et la comparer à l'évaluation de la période . $\sqrt{ap}$ obtenue par linéarisation (chapitre 7, § 4.4).

4. VALEURS DE LA FONCTION DE GAUSS

On considère l'équation différentielle $y' = ty + 1$.

a) Trouver les solutions de cette équation.
Vérifier que la solution f telle que $f(0) = 0$ est définie par

$$f(t) = e^{t^2/2} \int_0^t e^{-u^2/2}\, du .$$

b) Exprimer la fonction de Gauss ϕ (exercice 3 du chapitre 6) au moyen de f.

c) Calculer $\phi(1)$ en résolvant numériquement l'équation différentielle et comparer les résultats obtenus par les diverses méthodes de résolution.
Comparer avec les résultats obtenus par les méthodes de calcul numérique des intégrales.

d) Peut-on calculer l'intégrale de Gauss (exercice 2 du chapitre 6) en utilisant ces méthodes ?

Les méthodes de **simulation mathématique** et de **visualisation**, basées sur la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre s'adaptent à la résolution des **systèmes différentiels du premier ordre**, comme on l'a vu dans l'exemple du système de Volterra (exercice 3). Ces méthode sont précieuses pour l'étude des phénomènes irréguliers dont un exemple typique est donné par le **système de Lorenz** (exercice 5) qui est l'analogue continu du comportement chaotique étudié dans le chapitre 7 (exercice 4) pour des variables discrètes.

Une équation différentielle d'ordre supérieur peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre pour faciliter la mise en évidence des propriétés des solutions, par exemple l'existence d'un **régime permanent** vers lequel tend l'évolution du système (**vibrations non linéaires** : exercice 6).

5. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Les méthodes d'Euler et de Heun utilisées dans l'exercice 3 pour étudier numériquement le système de Volterra s'appliquent de la même façon à un système différentiel du premier ordre se présentant sous la forme

$$\left| \begin{array}{l} x' = F(t,x,y,z) \\ y' = G(t,x,y,z) \\ z' = H(t,x,y,z) \end{array} \right.$$

a) *Programmation*
Écrire un programme en Pascal permettant d'afficher les valeurs successives de x, y et z à partir de leurs valeurs initiales lues au clavier. Les fonctions F, G et H seront déclarées dans le programme sous le mot-clef function.

b) *Expérimentation*
Un système simple de trois équations amenant à des comportements irréguliers et apparemment erratiques des variables a été proposé en 1963 par E. LORENZ pour la modélisation de mouvements de convection dans l'atmosphère. Il dépend de trois paramètres s, r et b :

$$\left| \begin{array}{l} x' = (y - x)s \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{array} \right.$$

Fonctions puissances : $f(t) = t^{\alpha}$

Variable : t strictement positive *Paramètre* : α réel quelconque

Relations de définition

$t^{-\alpha} = \dfrac{1}{t^{\alpha}}$

$x = t^{1/\alpha} \Leftrightarrow x^{\alpha} = t$ avec $\begin{cases} x > 0 \\ t > 0 \end{cases}$

Relations fonctionnelles

$t^{\alpha}\, u^{\alpha} = (t\, u)^{\alpha}$

$t^{\alpha}\, t^{\beta} = t^{\alpha+\beta}$

$(t^{\alpha})^{\beta} = t^{\alpha\beta}$

Monotonie

Fonction croissante si $\alpha > 0$

Fonction décroissante si $\alpha < 0$

Limites

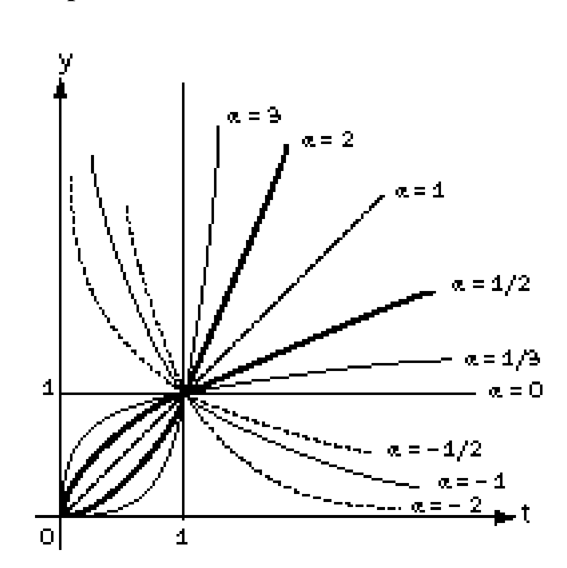
$1^{\alpha} = 1$ quel que soit α

$\lim_{t \to} t^{\alpha} = \begin{cases} \quad \text{si}\ \alpha > 0 \\ 0 \ \text{si}\ \alpha < 0 \end{cases}$

$\lim_{t \to 0} t^{\alpha} = \begin{cases} 0 \ \text{si}\ \alpha > 0 \\ \quad \text{si}\ \alpha < 0 \end{cases}$

Dérivées $(t^{\alpha})' = \alpha\, t^{\alpha-}$

Graphes



Fonctions exponentielles : $f(t) = a^{t}$

Variable : t réel quelconque *Paramètre* : a strictement positif

Relations de définition

À partir des fonctions puissances, échange de la variable et du paramètre.

Relations fonctionnelles

$a^{t}\, b^{t} = (a\, b)^{t}$

$a^{t}\, a^{u} = a^{t+u}$

$(a^{t})^{u} = a^{t\,u}$

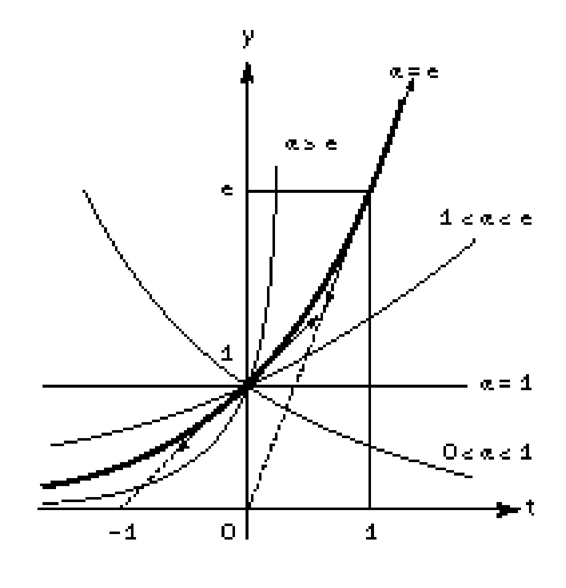
$a^{t} = e^{t \ln a}$

$e = 2{,}71828182\ldots$

Dérivées $(a^{t})' = a^{t} \ln a$

$(e^{t})' = e^{t}$

Graphes



Fonctions logarithmes : $f(t) = \log_a t$

Variable : $t > 0$ Paramètre : $a > 0$ $a \neq 1$: base du logarithme

Relations de définition

$x = \log_a t \Leftrightarrow t = a^x$

Cas particuliers

$x = \log_e t \Leftrightarrow t = e^x$

(logarithme népérien, noté ln)

$x = \log_{10} t \Leftrightarrow t = 10^x$

(logarithme de base 10, noté log)

Relations fonctionnelles

$\log_a uv = \log_a u + \log_a v$

$\log_a t^\alpha = \alpha \log_a t$

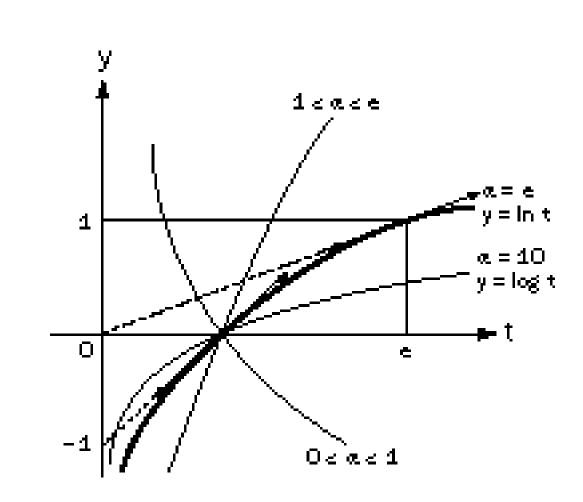
Rapport entre bases différentes

$a = e^{\log a}$

$a^x = e^{x \log a}$

$\log_a t = \frac{\ln t}{\ln a}$ $\log_b t = \frac{\log_a t}{\log_a b}$

Graphes



Dérivées $(\ln t)' = \frac{1}{t}$, $(\log t)' = \frac{1}{t \ln 10} \approx \frac{0,43429}{t}$, $(\log_a t)' = \frac{1}{t \ln a}$

Croissance comparée (on suppose $\alpha > 0$)

Graphes

Lorsque t augmente indéfiniment

- e^t tend vers l'infini plus vite que t^α

$$\lim_{t \to} \frac{e^t}{t^a} =$$

- t^α tend vers l'infini plus vite que ln t

$$\lim_{t \to} \frac{t^\alpha}{\ln t} =$$

